

**Consistent absorbing boundaries for time–domain
interaction analyses using the fractional calculus**

**Zur Beschreibung der Abstrahldämpfung bei
Interaktionsproblemen im Zeitbereich mit fraktionalen
Ableitungen**

Kurzfassung und Thesen zur

Dissertation

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs
(Dr.-Ing.)**

vorgelegt dem Wissenschaftlichen Rat
der Fakultät Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Dresden

von

Dipl.-Ing. Carolin Trinks
geb. am 9. März 1975 in Crimmitschau

Kurzfassung

Wellenausbreitungsprobleme in unbegrenzten Gebieten stehen im Mittelpunkt dieser Arbeit. Bei der numerischen Behandlung derartiger Aufgabenstellungen mit Hilfe von Finite Elemente Modellen kommt es zu Reflexionen an künstlich eingeführten Rändern. Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer Beschreibung der in der Kopplung zwischen einem solchen Modell und einem unbegrenzten Medium auftretenden Kraft–Verschiebungs–Beziehung im Zeitbereich, die das Phänomen der Abstrahldämpfung korrekt wiedergibt.

Hierfür werden bekannte Werte der dynamischen Steifigkeitsmatrix durch eine gebrochenrationale Funktion im Frequenzbereich interpoliert, die mit einem System von linearen Differentialgleichungen im Zeitbereich korrespondiert. Besondere Bedeutung kommt hierbei den asymptotischen Eigenschaften der Approximation zu. Durch eine getrennte Behandlung des nieder- und hochfrequenten Anteils der Kopplungsbeziehung wird eine exakte Übereinstimmung mit der statischen sowie der asymptotischen Steifigkeit für große Frequenzen erreicht.

Die Koeffizienten einer mehrdimensionalen Approximation des niederfrequenten Steifigkeitsanteiles werden mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ermittelt. Die anschließende Transformation in den Zeitbereich erfolgt unter Verwendung eines neuartigen algebraischen Zerlegungsprozesses. Folgt der asymptotische Anteil der Kraft–Verschiebungs–Beziehung einer Potenzfunktion von $i\Omega$, so kann dessen Äquivalent im Zeitbereich mit Hilfe fraktionaler Ableitungen geschlossen dargestellt werden. Schließlich liegt ein System von fraktionalen Differentialgleichungen vor, welches das betrachtete unbegrenzte Medium repräsentiert und im Rahmen einer Substrukturanalyse an die diskretisierten Bewegungsgleichungen eines Tragwerkes gekoppelt werden kann.

Für die numerische Lösung von fraktionalen Differentialgleichungen werden zwei Verfahren vorgestellt und hinsichtlich ihrer numerischen Effizienz und Genauigkeit bewertet. Da die Stabilität der genäherten Steifigkeitsbeziehung nicht *a priori* gewährleistet werden kann, werden zwei Methoden zur nachträglichen Eliminierung von instabilen Lösungsanteilen vorgeschlagen. Zur Beurteilung der Stabilität von fraktionalen Differentialgleichungen wird ein Hyper–System von Semidifferentialgleichungen herangezogen. Ein Stabilitätskriterium für solche Gleichungen wird abgeleitet.

Dynamische Aufgabenstellungen aus dem Bereich des Bauingenieurwesens, die die Beschreibung eines unbegrenzten Gebietes erfordern, können oft den Problemkreisen Boden–Bauwerk oder Fluid–Struktur Interaktion zugeordnet werden. Mit Blick auf diese Anwendungsgebiete werden der viskoelastisch gebettete semi–unendliche Dehnstab, der semi–unendliche Euler–Bernoulli Balken auf elastischer Gründung sowie die unendlich ausgedehnte Platte auf dem Halbraum betrachtet. Den Abschluß dieser Arbeit bildet die dynamische Analyse eines Staudamm–Staubecken Systems. Die Kombination einer Semi–Diskretisierung des Reservoirs mit der entwickelten Methode führt zu einer direkten Beschreibung des Fluids im Zeitbereich, die als Innovation im Umfeld praktischer Damm–Reservoir Interaktionsprobleme angesehen werden kann.

Thesen

1. Im Bereich des Bauingenieurwesens sind dynamische Boden-Bauwerk und Staudamm-Staubecken Interaktionsprobleme von Bedeutung. Bei der Behandlung solcher Aufgabenstellungen ist es in vielen Fällen sinnvoll, den Baugrund beziehungsweise das Reservoir als unbegrenzttes Gebiet zu idealisieren. Das Hauptinteresse des Ingenieurs gilt im allgemeinen den Reaktionen des beteiligten räumlich begrenzten Tragwerkes. Da Baugrund und Bauwerk beziehungsweise Staudamm und Staubecken jedoch zusammenwirken, ist eine korrekte Beschreibung der infolge der unendlichen Ausdehnung des Bodens beziehungsweise des Fluids auftretenden Energieabstrahlung wesentlich für die Analyse der Struktur.
2. Da sich das betrachtete Tragwerk nichtlinear verhalten kann, ist eine Modellierung desselben mit Finiten Elementen von Vorteil. Die Ausweitung eines solchen Modells auf das unbegrenzte Gebiet ist jedoch problematisch, da es im Fall dynamischer Erregungen zu Reflexionen an künstlich eingeführten Rändern kommt. Abhilfe schafft eine direkte Beschreibung der in der Kontaktfuge zwischen begrenztem Tragwerk und unbegrenztem Medium auftretenden Kraft-Verschiebungs-Beziehung im Zeitbereich, die im Rahmen einer Substrukturanalyse an die diskretisierten Bewegungsgleichungen der Struktur gekoppelt werden kann.
3. Die obengenannte Beziehung kann mit Hilfe einer Interpolation gegebener, frequenzabhängiger dynamischer Steifigkeitsmatrizen durch eine gebrochenrationale Funktion gefunden werden. Letztere korrespondiert mit einem System linearer Differentialgleichungen im Zeitbereich. Die in dieser Arbeit vorgestellte Steifigkeitsapproximation zeichnet sich durch die folgenden Eigenschaften aus:
 - (a) Im mehrdimensionalen Fall bleibt die Kopplung einzelner Freiheitsgrade voll erhalten.
 - (b) Die Näherung steht nicht in Beziehung zu einem physikalischen Modell, sondern folgt aus einem formalen Prozess.
 - (c) Die Überführung in den Zeitbereich gelingt mit Hilfe eines einfachen algebraischen Zerlegungsalgorithmuses.
4. Eine Steifigkeitsapproximation eignet sich nur dann für die Analyse transienter Problemstellungen, wenn eine Übereinstimmung der ersteren mit den exakten Werten der dynamischen Steifigkeit für sehr große Frequenzen gewährleistet ist. Hierfür ist eine geschlossene Interpretation des asymptotischen Steifigkeitsanteils erforderlich.
5. Die asymptotische dynamische Steifigkeit für große Erregerfrequenzen folgt in zahlreichen Anwendungsfällen aus dem Bereich des Bauingenieurwesens einer

Potenzfunktion $(i\Omega)^\alpha$ mit beliebigem reellen Exponenten α . Ein solcher Faktor kann als fraktionale Ableitung der gesuchten Kopplungsvariablen im Zeitbereich interpretiert werden, wobei der fraktionale Operator mit der unteren Grenze $a = -\infty$ zu wählen ist. Für eine korrekte Erfassung der Abstrahldämpfung ist demzufolge die Berücksichtigung der gesamten Vorgeschichte von Bedeutung.

6. Ein unbegrenztes Gebiet kann durch ein System von fraktionalen Differentialgleichungen direkt und folgerichtig beschrieben werden.
7. Aus Kausalitätsgründen starten alle in dieser Arbeit betrachteten Systeme aus der Ruhelage. Das heißt, daß alle Zustandsvariablen für Zeitpunkte $t < 0$ den Wert null annehmen. Demzufolge kann der fraktionale Operator mit der unteren Grenze $a = -\infty$ durch einen mit der unteren Grenze $a = 0$ ersetzt werden.
8. Systeme fraktionaler Differentialgleichungen können mit Hilfe einer direkten Integration im Zeitbereich mit großer Genauigkeit numerisch gelöst werden. Der hierbei begangene Fehler ist lediglich von der Größe des Zeitschrittes abhängig. Das entsprechende Verfahren ist numerisch aufwendig, da es die Auswertung der gesamten Geschichte der Zustandsvariablen erfordert.
9. Das fraktional schwindende Gedächtnis kann durch Umformungen in ein exponentiell nachlassendes überführt werden. Der entsprechende Integralausdruck kann durch eine äquivalente Differentialgleichung ersetzt werden. Es ist somit möglich, ein System von fraktionalen Differentialgleichungen in eines von gewöhnlichen Differentialgleichungen ohne Gedächtnisintegrale zu überführen, welches uneigentliche Integrale bezüglich einer Hilfsvariablen enthält. Bei der numerischen Auswertung letzterer werden zusätzliche Ungenauigkeiten eingeführt.
10. Das Abklingen homogener Lösungsanteile des aus der Steifigkeitsapproximation gewonnenen Systems von fraktionalen Differentialgleichungen kann nicht *a priori* garantiert werden. Zur Beurteilung der Stabilität werden die Eigenwerte eines Hypersystems von Semidifferentialgleichungen herangezogen. Instabile Lösungsanteile können nachträglich ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust eliminiert werden.
11. Die in dieser Arbeit entwickelte Methode kann besonders gewinnbringend im Rahmen einer transienten Damm–Reservoir Interaktionsbeschreibung eingesetzt werden. Bisherige Abstrahlbedingungen im Zeitbereich beinhalteten entweder Näherungen oder erforderten die numerisch aufwendige Auswertung von Faltungsintegralen. Alternative hochentwickelte Verfahren stehen nur im Frequenzbereich zur Verfügung. Hier gelingt die direkte Beschreibung des Staubeckens durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen im Zeitbereich, welches an die diskretisierten Bewegungsgleichungen eines Staudammes gekoppelt werden kann.